BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2015***

УДК 517.977

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Г.Ф.КУЛИЕВ, А.Т.РАМАЗАНОВА
Бакинский Государственный Университет
ramazanova-aysel@mail.ru

В работе рассматривается задача определения правой части уравнения поперечных колебаний стержня. Эта задача приводится к задаче оптимального управления. Доказывается необходимое и достаточное условие оптимальности.

Известно, что ряд задач математической физики, техники, механики и т.д. описываются уравнениями с частными производными четвертого порядка. Из таких уравнений отметим уравнение колебаний камертона, стержня, уравнение колебаний вращающихся валов, качки судна, уравнение колебаний пластин и т.д. [1,2,3,4]. Поэтому исследование задач оптимального управления в процессах, описываемых такими уравнениями является актуальным.

Ключевые слова: стержень, поперечные колебания, задача оптимального управления.

Постановка задачи: Рассмотрим краевую задачу для уравнения поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = v(x,t), \quad (x,t) \in Q = \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}, \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ u_t(x,0) = \varphi_1(x), \qquad (2)$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, \qquad (3)$$

где $\varphi_0 \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$, $\varphi_1 \in L_2(0,l)$ - заданные функции, а функция $v(x,t) \in L_2(Q)$ подлежит определению.

Отметим, что при каждой фиксированной функции $v(x,t) \in L_2(Q)$ краевая задача $(1)-(3)$ имеет единственное обобщенное решение из пространства $W_2^{2,1}(Q)$ $[5-7]$.

Чтобы определить $v(x,t)$, зададим дополнительное условие

$$u(x_0,t) = \varphi(t), \qquad (4)$$

где $x_0 \in (0,l)$, а $\varphi(t) \in L_2(0,T)$- заданная функция.

Эту задачу приводим к следующей задаче оптимального управления: требуется определить такую функцию $v(x,t) \in L_2(Q)$, которая минимизирует функционал

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(u(x_0,t;v) - \varphi(t)\right)^2 dt \tag{5}$$

вместе с решением краевой задачи $(1)-(3)$. Функцию $v(x,t)$- назовем управлением.

Если мы найдем такое управление $v(x,t)$, что оно доставляет функционалу (5) нулевое значение, тогда дополнительное условие (4) выполняется.

Покажем что, $\inf\limits_{v\in L_2(Q)} J(v) = 0$.

Этот вопрос эквивалентен вопросу о плотности в $L_2(0,T)$ образа $L_2(Q)$ при отображении

$$v \to u(x_0,t;v). \tag{6}$$

Для решения этого вопроса применим теорему Хана-Банаха [8]. Пусть $\psi_0(t)$-заданная функция из $L_2(0,T)$ такая, что

$$\int_0^T u(x_0,t;v)\psi_0(t)dt = 0,\ \forall v \in L_2(Q). \tag{7}$$

Мы хотим выяснить, будет ли отсюда следовать, что $\psi_0(t) = 0$.
Введем функцию $w(x,t)$- как решение задачи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \psi_0(t)\delta(x-x_0), \qquad (x,t)\in Q, \tag{8}$$

$$w(x,T)=0\ w_t(x,T)=0, \qquad 0\le x\le l, \tag{9}$$

$$w(0,t)=0,\ w(l,t)=0,\ w_x(0,t)=0,\ w_x(l,t)=0, \quad 0\le t\le T, \tag{10}$$

где $\delta(x,t)$-дельта функция Дирака.

Можно показать, что эта задача имеет единственное обобщенное решение в $W_2^{2,1}(Q)$ [6,7].

В силу определения обобщенного решения задачи $(1)-(3)$ имеем: при $t=0$ выполняется условие $u(x,0)=\varphi_0(x)$ и следующее интегральное тождество для произвольной функции $\eta \in W_2^{2,1}(Q)$, $\eta(0,t)=0$, $\eta(l,t)=0$, $\eta_x(0,t)=0$, $\eta_x(l,t)=0$.

$$\int_0^l \frac{\partial u(x,T;v)}{\partial t}\eta(x,T)dx - \int_0^l u_1(x)\eta(x,0)dx + \iint_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - v\eta \right) dxdt = 0. \qquad (11)$$

А в силу определения обобщенного решения задачи $(8)-(10)$ имеем: при $t = T$ выполняется $w(x,T) = 0$ и интегральное тождество

$$-\int_0^l \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} g(x,0)dx + \iint_Q \left(-\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dxdt - \int_0^T \psi_0(t)g(x_0,t)dt = 0 \qquad (12)$$

$\forall g \in W_2^{2,1}(Q),\ g(0,t) = 0,\ \ g(l,t) = 0,\ g_x(0,t) = 0,\ \ g_x(l,t) = 0.$

Теперь в (11) за функцию η берем $w(x,t)$, а в (12) за функцию g берем $u(x,t;v)$, из (11) вычтем (12), тогда имеем:

$$-\int_0^l u_1(x)w(x,0)dx + \int_0^l \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}u_0(x)dx - \iint_Q vwdxdt + \int_0^T \psi_0(t)u(x_0,t;v)dt = 0$$

$$\forall v \in L_2(Q).$$

Отсюда в силу условия (7) получим

$$\iint_Q v(x,t)w(x,t)dxdt + \int_0^l \left[u_1(x)w(x,0) - u_0(x)\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} \right] dx = 0,\ \ \forall v \in L_2(Q).$$

Если это соотношение записать для произвольных $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$, из полученных двух равенств, следует, что

$$\iint_Q (v_1(x,t) - v_2(x,t))w(x,t)dxdt = 0, \qquad \forall v_1, v_2 \in L_2(Q).$$

Тогда отсюда следует, что $w(x,t) = 0$ почти всюду в Q.

Поскольку $w(x,t)$ как решение задачи $(8)-(10)$ является непрерывной функций на $\overline{Q}$, $w(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in Q$, поэтому из (7) следует, что $\psi_0(t) = 0$. Таким образом, мы получаем, что $\inf\limits_{v \in L_2(Q)} J(v) = 0$.

Покажем, что функционал (5) дифференцируем в $L_2(Q)$.

Введем следующую сопряженную задачу к задаче $(1)-(3),(5)$.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = -[u(x,t;v) - \varphi(t)]\delta(x - x_0), \qquad (13)$$

$$\psi(0,t) = 0,\ \psi(l,t) = 0,\ \psi_x(0,t) = 0,\ \psi_x(l,t) = 0, \qquad (14)$$

$$\psi(x,T) = 0,\ \psi_t(x,T) = 0. \qquad (15)$$

Берем два управления: $v(x,t),\ v(x,t) + \delta v(x,t) \in L_2(Q)$.

Найдем приращения функционала (5)

$$\delta J(v) = J(v + \delta v) - J(v) = \frac{1}{2}\int_0^T \left\{ [u(x_0,t;v + \delta v) - \varphi(t)]^2 - [u(x,t;v) - \varphi(t)]^2 \right\} dt,$$

где

$$u(x,t;v+\delta v)=u(x,t;v)+\delta u(x,t)$$

отсюда следует, что

$$\delta J(v)=\int_0^T[u(x_0,t;v)-\varphi(t)]\delta u(x_0,t)dt+R, \qquad (16)$$

где

$$R=\frac{1}{2}\int_0^T(\delta u(x_0,t))^2dt,$$

а $\delta u(x,t)\in W_2^{2,1}(Q)$ является обобщенным решением следующей краевой задачи

$$\frac{\partial^2\delta u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4\delta u}{\partial x^4}=\delta v, \qquad (17)$$

$$\delta u(x,0)=0\,,\ \ \psi_t(x,0)=0, \qquad (18)$$

$$\delta u(0,t)=0\,,\ \delta u(l,t)=0,\ \delta u_x(0,t)=0,\ \delta u_x(l,t)=0, \qquad (19)$$

т.е. для любой функций $\forall\eta\in W_2^{2,1}(Q)$, $\eta(x,T)=0$, $\eta(0,t)=0$, $\eta(l,t)=0$, $\eta_x(0,t)=0$, $\eta_x(l,t)=0,$ выполняется интегральное тождество

$$\int_0^T\int_0^l\left(-\frac{\partial\delta u}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)dxdt-\iint_Q\delta v\cdot\eta dxdt=0. \qquad (20)$$

Поскольку функция $\psi(x,t)$ является обобщенным решением задачи $(13)-(15)$ для любой функции $g\in W_2^{2,1}(Q)$, $g(x,0)=0$, $g(0,t)=0$, $g(l,t)=0$, $g_x(0,t)=0$, $g_x(l,t)=0,$
выполняется интегральное тождество

$$\int_0^T\int_0^l\left(-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)dxdt+\int_0^T[u(x_0,t;v)-\varphi(t)]g(x_0,t)dt=0. \qquad (21)$$

В тождества (20) в место $\eta(x,t)$ берем $\psi(x,t)$, а в тождества (21) в место $g(x,t)$ берем $\delta u(x,t)$. Из полученного первого тождества вычтем второе тождество.
Тогда имеем

$$-\iint_Q\delta v\cdot\psi dxdt-\int_0^T[u(x_0,t;v)-\varphi(t)]\delta u(x_0,t)dt=0. \qquad (22)$$

Поэтому (16) и (22) следует, что

$$\delta J(v)=\iint_Q-\psi(x,t)\delta v(x,t)dxdt+R. \qquad (23)$$

Покажем, что

$$\|\delta u(x_0,t)\|^2_{L_2(0,T)} \le c\|\delta v\|^2_{L_2(Q)}. \qquad (24)$$

Сначала покажем что

$$\|\delta u(x,t)\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \le c\|\delta v\|^2_{L_2(Q)}. \qquad (25)$$

Для доказательства оценку (25) применим метода Фаэдо - Галяркина.

Пусть $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальная система в $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ и $\int_0^l \omega_i(x)\omega_k(x)dx = \begin{cases} 1, & i=k, \\ 0, & i\ne k. \end{cases}$

Приближенные решения задачи $(17)-(19)$ $\delta u^N(x,t)$ ищем в виде

$\delta u^N(x,t) = \sum_{i=1}^{N} c_i^N(t)\omega_i(x)$ из соотношений

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2}\omega_j(x)dx + a^2\int_0^l \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial x^2}\frac{d^2\omega_j(x)}{dx^2}dx = \int_0^l \delta v(x,t)\omega_j(x)dx, \quad j=\overline{1,N}, \qquad (26)$$

$$c_i^N(0)=0\,, \ \frac{dc_i^N(0)}{dt}=0\,, \ i=\overline{1,N}. \qquad (27)$$

Равенства (26) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных $c_k^N(t),\ k=\overline{1,N}$, разрешенной относительно $\dfrac{d^2c_k^N}{dt^2}$. Это система однозначно разрешима при начальных данных (27), причем $\dfrac{d^2c_k^N}{dt^2}\in L_2(0,T)$.

Умножая каждая из равенств (26) на свое $\dfrac{dc_j^N(t)}{dt}$ и суммируя по j от 1 до N, придем к равенству

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2}\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}dx + a^2\int_0^l \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \delta u^N}{\partial t\partial x^2}dx = \int_0^l \delta v\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}dx. \qquad (28)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial x^2}\right)^2\right]dx = \int_0^l \delta v\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}dx \qquad (29)$$

Последнее равенство интегрируем по t от 0 до t, тогда имеем

$$\int_0^l\left[\left(\frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial^2 \delta u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx = 2\int_0^t\int_0^l \delta v(x,s)\frac{\partial \delta u^N(x,s)}{\partial t}dxds \le$$

$$\le \int_0^t\int_0^l |\delta(v)|^2dxds + \int_0^t\int_0^l \left|\frac{\partial \delta u^N(x,s)}{\partial t}\right|^2 dxds. \qquad (30)$$

В силу эквивалентности норм в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$, из последнего неравенства с помощью элементарных преобразований получаем следующее:

$$\int_0^l \left[\left(\delta u^N(x,t)\right) + \left(\frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 \right] dx \le c\int_0^T\int_0^l (\delta v)^2 dxdt +$$

$$+ c\int_0^T\int_0^l \left[\left(\delta u^N(x,s)\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u^N(x,s)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u^N(x,s)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u^N(x,s)}{\partial x^2}\right)^2 \right] dxds.$$

Отсюда применяя лемму Грануолла получаем:

$$\int_0^l \left[\left(\delta u^N(x,t)\right) + \left(\frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 \right] dx \le c\|\delta v\|^2_{L_2(Q)},$$

$$\forall t \in [0,T].$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\|\delta u^N\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \le c\|\delta v\|^2_{L_2(Q)}.$$

Поэтому из последовательности δu^N можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо в $W_2^{2,1}(Q)$ к некоторому элементу $\delta u \in W_2^{2,1}(Q)$. В силу слабой полунепрерывности снизу норму в гилбертом пространстве, получаем, что для $\delta u(x,t)$ справедлива оценка

$$\|\delta u\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \le c\|\delta v\|^2_{L_2(Q)}.$$

Поскольку $W_2^{2,1}(Q)$ ограниченно вложено в $L_2(0,T)$ $[5, стр.70]$, отсюда следует, что

$$\|\delta u(x_0,t)\|^2_{L_2(0,T)} \le c\|\delta u\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \le c\|\delta v\|^2_{L_2(Q)}. \qquad (31)$$

Покажем что, $\delta u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи $(17)-(19)$. Умножим каждое из соотношений (26) на свою функцию $d_j(t) \in W_2^1(0,T)$, $d_j(T) = 0,$ полученные равенства просуммируем по всем j от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T. После этого в первом члене проведем интегрирование по частям, перенося $\frac{\partial}{\partial t}$ с δu^N на $\eta = \sum_{j=1}^N d_j(t)\omega_j(x)$.

Это даст тождество

$$\iint_Q \left(-\frac{\partial u^N(t)}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) dxdt = \iint_Q \delta v \cdot \eta dxdt, \qquad (32)$$

справедливое при $\forall \eta$ вида $\sum_{j=1}^{N} d_j(t)\omega_j(x)$. Совокупность таких η обозначим через R_N. В (31) можно перейти к пределу по выбранной выше под последовательности при закрепленном η из какого либо R_{N_i}. Это приведет к тождеству (20) для предельной функции δu при $\forall \eta \in R_{N_i}$. Но $\bigcup_{N=1}^{\infty} R_n$ плотно в $W_2^{2,1}(Q)$, а $\delta u \in W_2^{2,1}(Q)$, следовательно (20) будет выполнятся для $\delta u(x,t)$. Так что, предельная функция $\delta u(x,t)$ есть обобщенное решение из $W_2^{2,1}(Q)$ задачи $(17)-(19)$.

Таким образом, из (31) мы получаем, что

$$R \le c\|\delta v\|_{L_2(Q)}^2. \tag{33}$$

Тогда из (23) и (33) следует, что градиент функционал $J(v)$ равняется

$$J'(v) = -\psi(x,t).$$

Теорема: Для того чтобы управление $v_0(x,t)$ было оптимальным управлением в задаче $(1)-(4),(5)$ необходимо и достаточно $\psi(x,t)=0$, $(x,t)\in Q$.

Доказательство: Пусть $v_0(x,t)$ оптимальное управление в задаче $(1)-(4),(6)$, тогда в силу известной теоремы из $[9]$

$$\langle J'(v), v-v_0\rangle \ge 0,\ \forall v \in L_2(Q),$$

т.е.

$$\iint_Q (-\psi(x,t))(v(x,t)-v_0(x,t))dxdt \ge 0,\ \forall v \in L_2(Q).$$

отсюда следует, что

$$J'(v_0) = \psi(x,t) = 0.$$

Из последнего равенства получаем необходимость теоремы. Так как задача $(1)-(4),(5)$ является линейно-квадратичной задачей, полученное условие являются и достаточным для оптимальности управления $v_0(x,t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: 1976, 736 с.
2. Арман. Ж..-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977, 144 с.
3. Комков В.Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975, 158 с.
4. Ишмухаметов А.З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределительными параметрами. //Вычислительный центр РАН, 2001, 121с.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.

6. Ломовцев Ф.Е., Юрчук Н.И. Задача Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка. // Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 12, с.2242-2250.
7. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 372с.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976, 192 с.
9. Васильев Ф.П., Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
10. Миронов М.А. Точные решения уравнения поперечных колебания стержня со специальным законом изменения поперечного сечения, Сессия Научного совета по акустике РАН и XXV сессия Российского акустического общества , 2012, 204-209 с.

ÇUBUĞUN ENİNƏ RƏQSLƏRİ TƏNLİYİNİN SAĞ TƏRƏFİNİN TƏYİNİ HAQQINDA

H.F.QULİYEV, A.T.RAMAZANOVA

XÜLASƏ

İşdə çubuğun eninə rəqsləri tənliyinin sağ tərəfinin təyini haqqında məsələyə baxılıb. Bu məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilib. Optimallığın zəruri və kafi şərtləri çıxarılıb və optimal idarəedici optimallıq şərtinin köməyilə isbat olunub .

Açar sözlər: çubuq, eninə rəqs, optimal idarəetmə məsələsi.

DETERMİNATİON OF THE RİGHT SİDE OF THE EQUATION OF TRANSVERSAL VİBRATİONS OF A BAR

H.F.GULIYEV, A.T.RAMAZANOVA

SUMMARY

In this paper the problem of determining the right side of the equation of transversal vibrations of a bar is considered. This problem is reduced to the optimal control problem. The necessary and sufficient condition of optimality is introduced and optimal control is proved by using the optimal condition.

Key words: bar, transversal vibrations, optimal control problem.

Поступила в редакцию: 03.06.2015 г.
Подписано к печати: 18.06.2015 г.